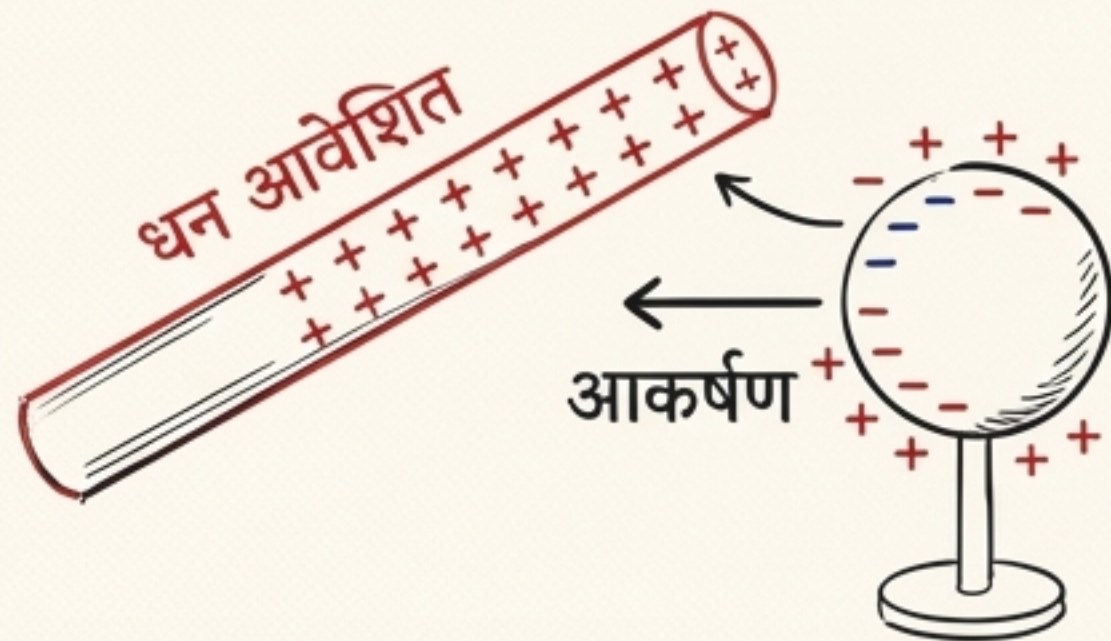


{ * ~ स्थिर वैद्युतिकी एवं वैद्युत आवेश ~ * }

मूलभूत परिभाषाएं

स्थिर वैद्युतिकी : भौतिक विज्ञान की वह शाखा जिसमें स्थिर आवेशों का अध्ययन किया जाता है।

वैद्युत आवेश : वस्तु का वह गुण जिसके कारण वह वैद्युत तथा चुम्बकीय प्रभाव उत्पन्न करता है तथा उनका अनुभव करता है।



मात्रक एवं कण

S.I. मात्रक	= कूलॉम (C)
C.G.S. मात्रक	= स्टेट कूलॉम (Stat Coulomb / Franklin)
सबसे बड़ा मात्रक	= फैराडे (Faraday)
सबसे छोटा मात्रक	= फ्रैंकलिन
1 Faraday	= 96500 C
1 C	= 3×10^9 Stat C

Note

$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
 $p = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 $n = 0$, $m_n = 1.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 $\alpha\text{-कण} = +3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$

मूल आवेश $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

~ आवेशन एवं आवेश के मूलभूत गुण ~

नोट

- किसी वस्तु को आवेशित करने का अर्थ है इलेक्ट्रॉन हटाना (धनावेश) या इलेक्ट्रॉन देना (ऋणावेश)।
- रगड़ने पर इलेक्ट्रॉन एक पदार्थ से दूसरे में स्थानान्तरित होते हैं।
- आवेशन के दौरान वस्तु के द्रव्यमान में मामूली परिवर्तन होता है (धनावेशित होने पर घटता है, ऋणावेशित होने पर बढ़ता है)।

वैद्युत आवेश के मूलभूत गुण

1. आवेशों की योज्यता

किसी भी निकाय का कुल आवेश उस पर उपस्थित आवेशों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है।

$$q = q_1 + q_2 - q_3 - q_4 + q_5$$

2. आवेशों का क्वाण्टीकरण

आवेश का कुल मान मूल आवेश के पूर्ण गुणज के रूप में होता है।

$$q = \pm ne \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$$

$$n \neq 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 3.9, \frac{1}{2}, \dots$$

$$q = \pm 1e, \pm 2e, \pm 3e, \pm 4e \dots$$

$$q \neq \pm 1.5e, \pm 2.9e, \pm \frac{2}{3}e \dots$$

3. आवेश का संरक्षण

आवेश को न तो उत्पन्न किया जा सकता है और न ही नष्ट किया जा सकता है, केवल एक वस्तु से दूसरी पर स्थानान्तरित किया जा सकता है।

~ कूलॉम का नियम एवं वैद्युतशीलता ~

कूलॉम का नियम

दो स्थिर बिन्दु आवेशों के बीच लगने वाला वैद्युत बल आवेशों के परिमाणों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।



$$F \propto q_1 q_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ N}$$

निर्वात की वैद्युतशीलता (ϵ_0)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \Rightarrow \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

$$\text{मात्रक} = \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$\text{विमीय सूत्र} = [M^{-1}L^{-3}T^4A^2]$$

आपेक्षिक वैद्युतशीलता

माध्यम की वैद्युतशीलता (ϵ) तथा निर्वात की वैद्युतशीलता (ϵ_0) के अनुपात को आपेक्षिक वैद्युतशीलता कहते हैं।

$$\epsilon_r \text{ (या } K) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

~ संख्यात्मक प्रश्न - भाग 1 ~

प्रश्न 1: 1 कूलॉम आवेश में कितने इलेक्ट्रॉन होते हैं?

$$q = 1 \text{ C}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$n = \frac{q}{e} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}}$$

$$n = 6.25 \times 10^{18}$$

प्रश्न 2: एक चालक पर 500 इलेक्ट्रॉनों की कमी है, आवेश की मात्रा व प्रकृति ज्ञात कीजिए।

प्रकृति = धनावेश

$$n = 500$$

$$q = ne = 500 \times 1.6 \times 10^{-19}$$

$$q = 8.0 \times 10^{-17} \text{ C}$$

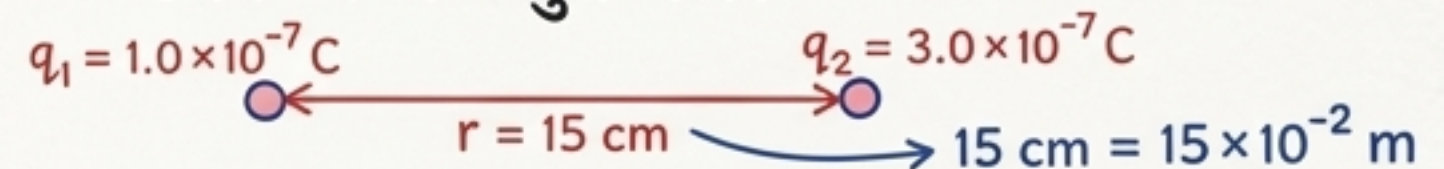
प्रश्न 3: एक चालक पर $-8.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ आवेश है। कितने इलेक्ट्रॉन अधिक या कम हैं?

$$q = 8.0 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$n = \frac{q}{e} = \frac{8.0 \times 10^{-7}}{1.6 \times 10^{-19}}$$

$$n = 5 \times 10^{12} \text{ (इलेक्ट्रॉनों की अधिकता)}$$

प्रश्न 4: दो छोटे गोले जिन पर आवेश $1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ तथा $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ है, हवा में 15 cm दूरी पर रखे हैं। उनके मध्य वैद्युत बल?



$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = (9 \times 10^9) \times \frac{[(1.0 \times 10^{-7}) \times (3.0 \times 10^{-7})]}{(15 \times 10^{-2})^2}$$

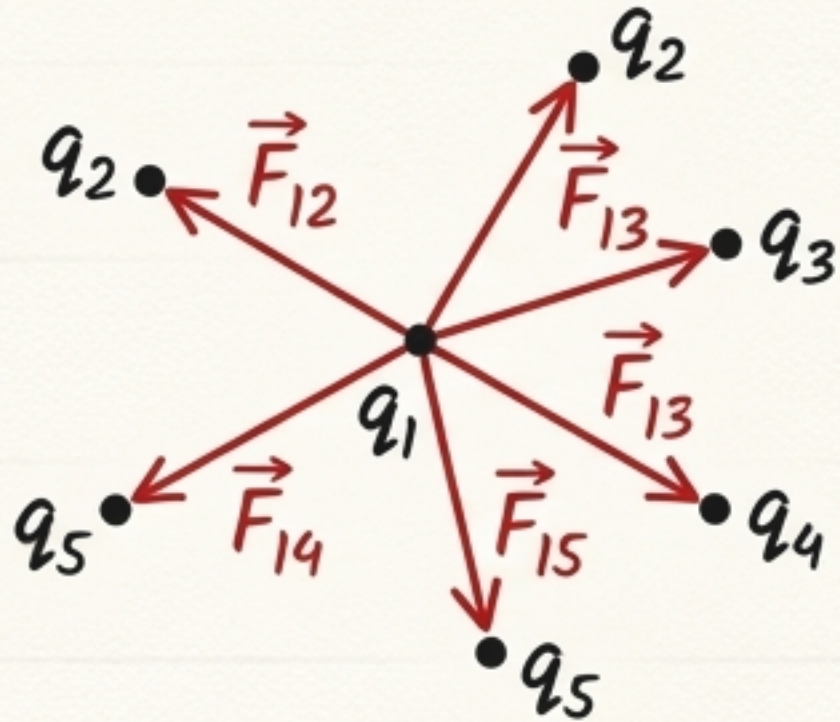
$$F = \frac{27 \times 10^9 \times 10^{-14}}{225 \times 10^{-4}} = \frac{27}{225} \times 10^{-1} = 0.12 \times 10^{-1}$$

$$F = 1.2 \times 10^{-2} \text{ N}$$

~ अध्यारोपण का सिद्धांत एवं आवेश वितरण ~

अध्यारोपण का सिद्धांत

किसी आवेशित कण पर लगने वाला बल अन्य सभी आवेशों के द्वारा लगाये गये अलग-अलग बलों के सदिश योग के बराबर होता है।



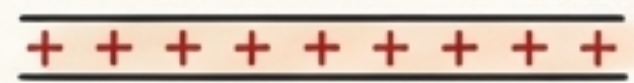
$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15}$$

सतत आवेश वितरण

1. रेखीय आवेश घनत्व (1D):

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

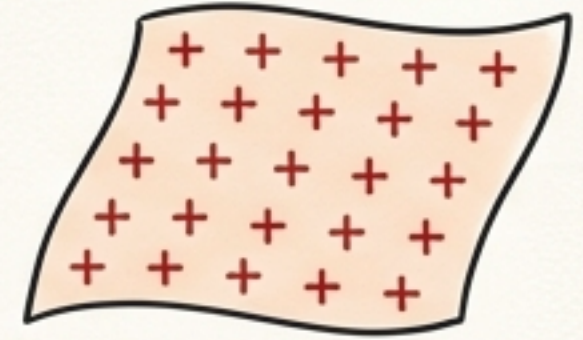
मात्रक: C/m ,
विमा: $[L^{-1}TA]$



2. पृष्ठीय आवेश घनत्व (2D):

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

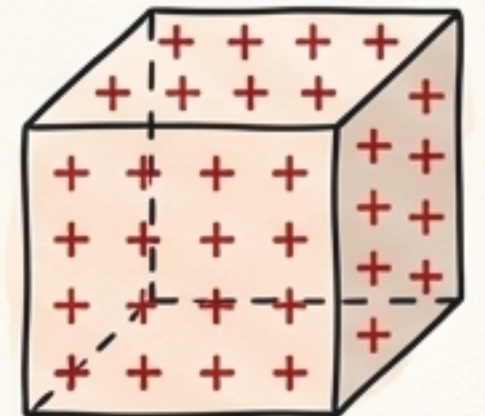
मात्रक: C/m^2 ,
विमा: $[L^{-2}TA]$



3. आयतन आवेश घनत्व (3D):

$$\rho = \frac{q}{V}$$

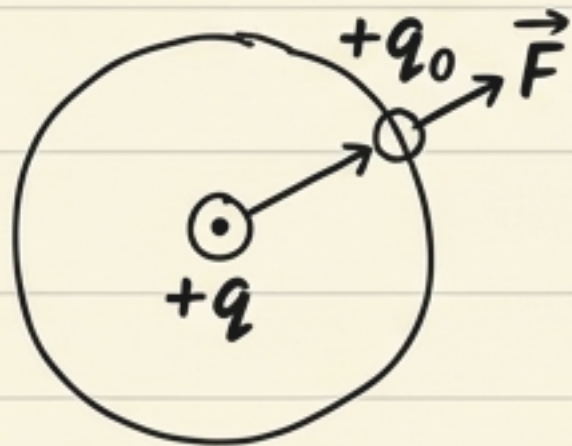
मात्रक: C/m^3 ,
विमा: $[L^{-3}TA]$



~ वैद्युत क्षेत्र एवं तीव्रता ~

वैद्युत क्षेत्र एवं तीव्रता

किसी आवेश के चारो ओर का वह क्षेत्र जिसमें कोई अन्य आवेश आकर्षण या प्रतिकर्षण का अनुभव करता है।



$$E = \frac{F}{q_0}$$

यह एक सदिश राशि है।

मात्रक: N/C , विमा: $[MLT^{-3}A^{-1}]$

बिन्दु आवेश के कारण तीव्रता

कूलॉम के नियम से : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}$

$$E = \frac{F}{q_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

प्रश्न: α -कण $15 \times 10^4 N/C$ के वैद्युत क्षेत्र में स्थित है। वैद्युत बल की गणना करें।

$$q = 3.2 \times 10^{-19} C, E = 15 \times 10^4.$$

$$F = qE$$

$$F = 4.8 \times 10^{-14} N$$

प्रश्न: एक बिन्दु आवेश से $1 m$ की दूरी पर $E = 450 N/C$ है। आवेश का मान?

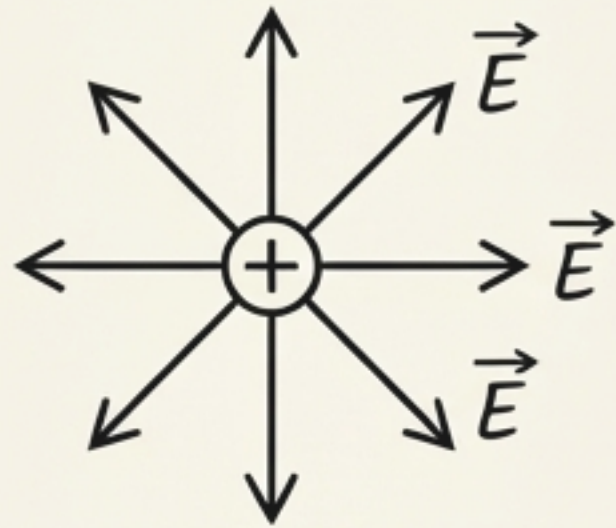
$$450 = \frac{q \times 10^9 \times q}{1^2}$$

$$q = 5 \times 10^{-8} C$$

~ वैद्युत बल रेखाएँ ~

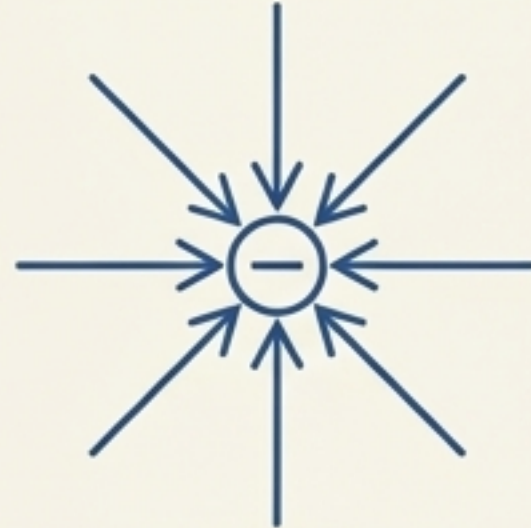
काहम्पनिक रेखाएँ जो वास्तविक वैद्युत क्षेत्र को प्रदर्शित करती हैं।

धनावेश के कारण

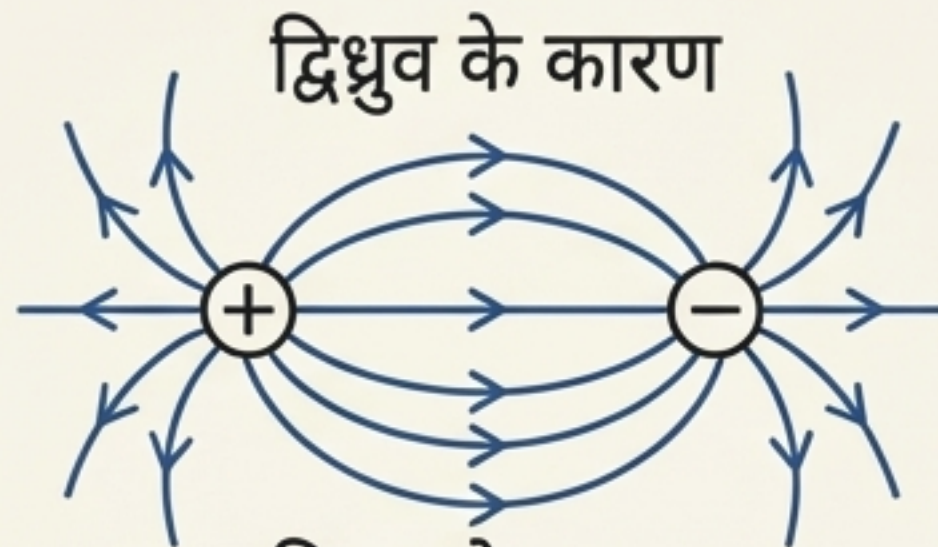


धनावेश के कारण

ऋणावेश के कारण



ऋणावेश के कारण



द्विध्रुव के कारण

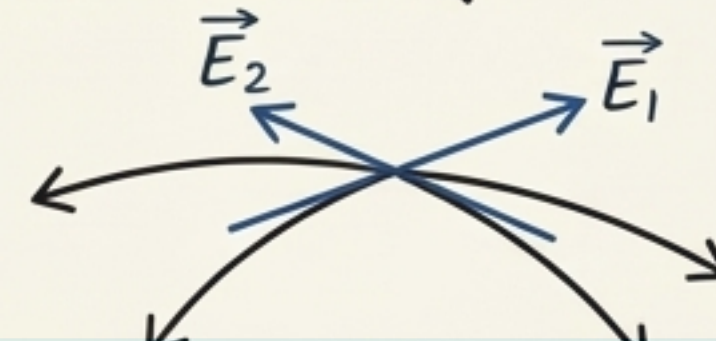
द्विध्रुव के कारण

वैद्युत बल रेखाओं के गुण

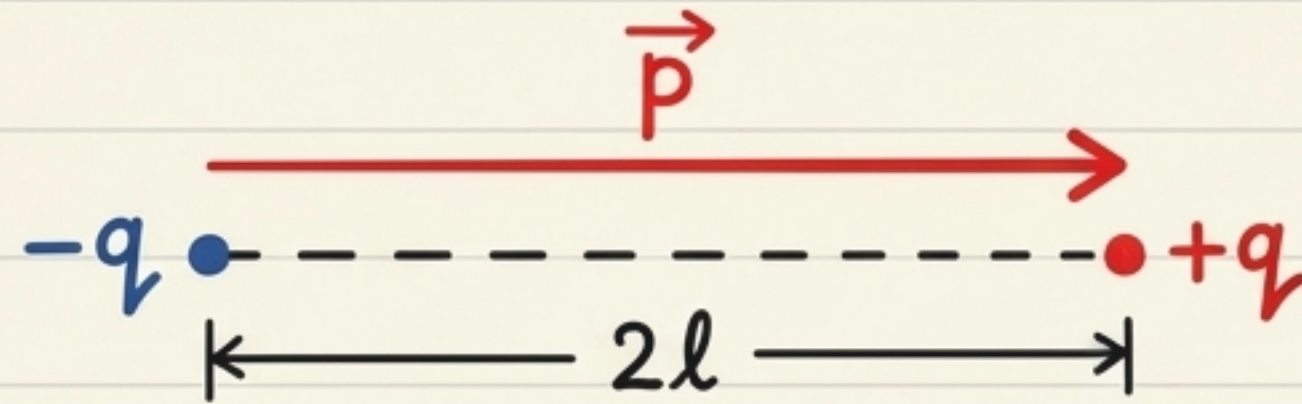
1. ये धनावेश से शुरू होकर ऋणावेश पर समाप्त होती हैं।
2. ये सतत होती हैं और कभी बंद लूप नहीं बनातीं।
3. इनके किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा वैद्युत क्षेत्र की दिशा बताती है।

7. दो वैद्युत बल रेखाएं कभी भी एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं कर सकतीं।

क्योंकि उनके कटान बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ अलग-अलग वैद्युत क्षेत्र की दिशा को प्रदर्शित करेंगी जो कि असम्भव है।



~ वैद्युत द्विध्रुव एवं आघूर्ण ~



वैद्युत द्विध्रुव: जब दो बराबर परिमाण व विपरीत प्रकृति के आवेश एक-दूसरे से अल्प दूरी पर होते हैं, तो इस निकाय को वैद्युत द्विध्रुव कहते हैं।

$$p = q \times 2l$$

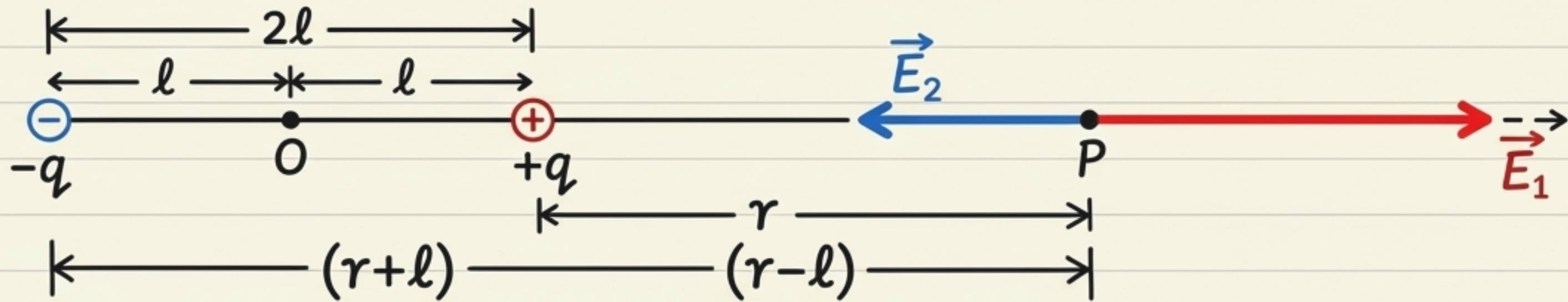
→ वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण

- यह एक सदिश राशि है।
- इसकी दिशा सदैव ऋणावेश ($-q$) से धनावेश ($+q$) की ओर होती है।

मात्रक = कूलॉम-मीटर (C-m)

विमीय सूत्र = [LTA]

~ द्विध्रुव के कारण वैद्युत क्षेत्र - अक्षीय स्थिति ~



$$E_1 (+q \text{ के कारण}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r-l)^2} \right]$$

$$E_2 (-q \text{ के कारण}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r+l)^2} \right]$$

परिणामी तीव्रता $E = E_1 - E_2$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right]$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right]$$

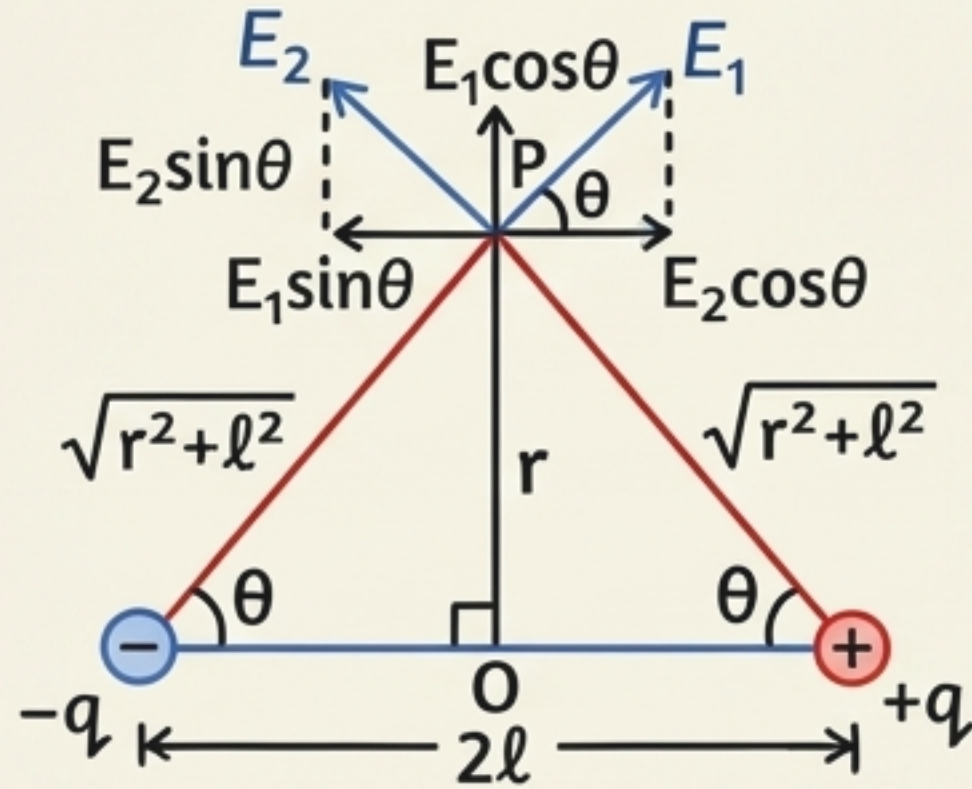
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4rl}{(r^2-l^2)^2} \right]$$

चूँकि $p = q \times 2l$, अतः $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2pr}{(r^2-l^2)^2} \right]$

यदि $r \gg l$, तो l^2 को नगण्य मानने पर

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p}{r^3} \right)$$

~ द्विध्रुव के कारण वैद्युत क्षेत्र - निरक्षीय स्थिति ~



$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r^2 + l^2} \right]$$

चूँकि लम्बवत घटक ($\sin\theta$) निरस्त हो जाते हैं, परिणामी तीव्रता $E = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta = 2E_1 \cos\theta$

चित्र से : $\cos\theta = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$

$$E = 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r^2 + l^2} \right] \times \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q \times 2l}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \right]$$

चूँकि $p = q \times 2l$, तथा $r \gg l$ होने पर l^2 को नगण्य मानने पर

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} \right)$$

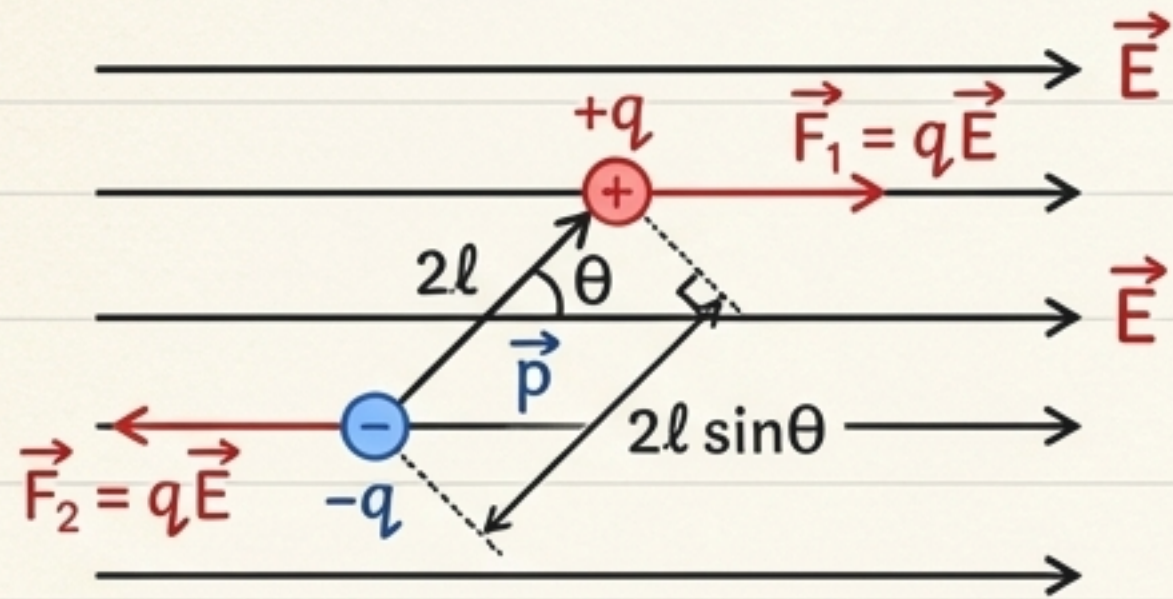
खास बात

(i) $E_{\text{अक्षीय}} = \frac{2kp}{r^3}$

(ii) $E_{\text{निरक्षीय}} = \frac{kp}{r^3}$

(iii) अतः $E \propto \frac{1}{r^3}$

~ एकसमान वैद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव पर बल आघूर्ण ~



बल युग्म का आघूर्ण (τ) = बल का परिमाण $\times$ दोनों बलों की क्रिया रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरी

$$\tau = F \times 2l \sin\theta$$

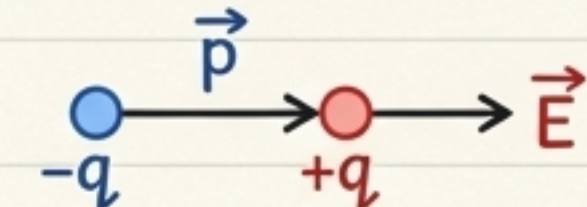
$$\tau = (qE) \times 2l \sin\theta$$

$$\tau = (q \times 2l) E \sin\theta$$

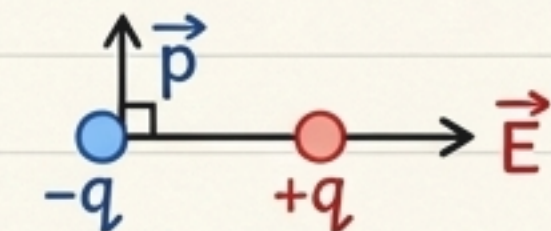
$$\tau = pE \sin\theta$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

विशेष स्थिति (Special Cases)

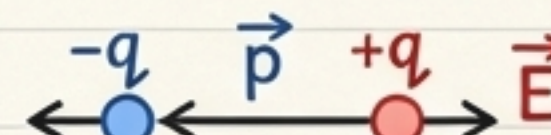
(i) 

$\theta = 0^\circ : \tau = pE \sin 0^\circ = 0.$ (न्यूनतम/स्थायी सन्तुलन)

(ii) 

$\theta = 90^\circ$ (IMP) : $\tau = pE \sin 90^\circ = pE$

$\tau_{\max} = pE$

(iii) 

$\theta = 180^\circ : \tau = pE \sin 180^\circ = 0.$
(अस्थायी सन्तुलन)

~ वैद्युत फ्लक्स एवं गॉस की प्रमेय ~

वैद्युत फ्लक्स (Φ_E)

वैद्युत क्षेत्र में स्थित किसी कल्पनिक पृष्ठ से अभिलम्बवत् गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या की माप को वैद्युत फ्लक्स कहते हैं।

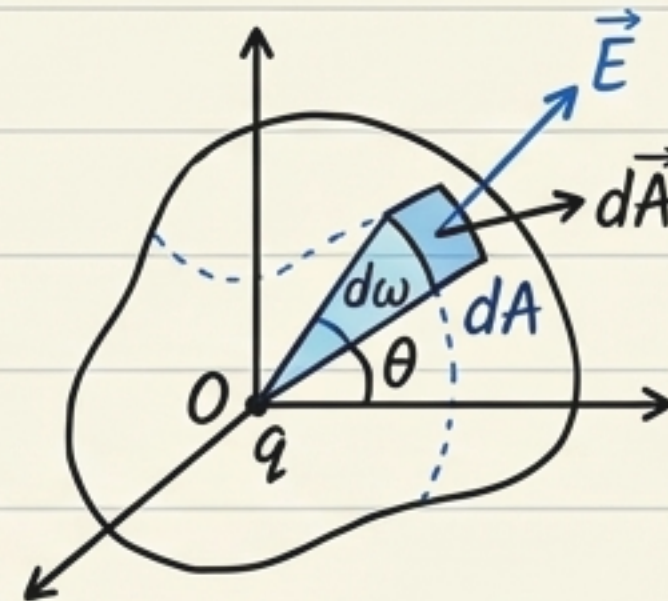
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA \cos\theta$$

- यह एक अदिश राशि है।
- मात्रक: $N\text{-m}^2/C$ या $V\text{-m}$.
- विमीय सूत्र: $[ML^3T^{-3}A^{-1}]$

गॉस की प्रमेय (Gauss's Theorem)

किसी बन्द पृष्ठ से गुजरने वाला कुल वैद्युत फ्लक्स Φ_E , उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश q का $1/\epsilon_0$ गुना होता है।

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$d\Phi_E = E dA \cos\theta$$

$$d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q dA \cos\theta}{r^2} \right]$$

घन कोण की परिभाषा से: $d\omega = \frac{dA \cos\theta}{r^2}$

$$\text{अतः } d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega$$

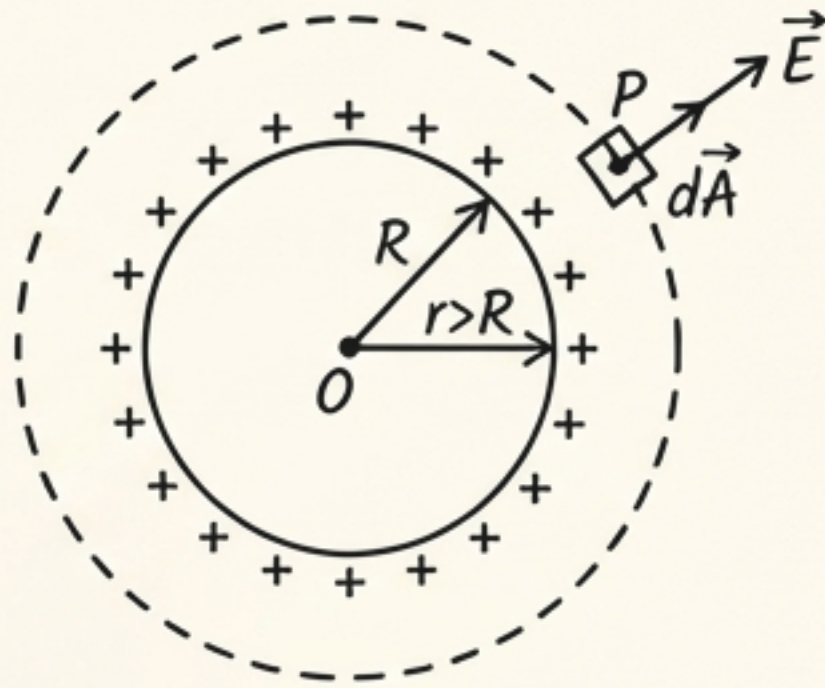
$$\text{सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ के लिए समाकलन करने पर: } \Phi_E = \oint d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\omega$$

$$\text{चूँकि } \oint d\omega = 4\pi, \text{ अतः } \Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

~ गॉस प्रमेय के अनुप्रयोग - 1: गोलीय कोश ~

R त्रिज्या के एकसमान आवेशित गोलीय कोश के कारण वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता (आवेश q समान रूप से वितरित है)।

1. बाह्य बिन्दु पर ($r > R$)



$$\oint \vec{E} dA \cos 0^\circ = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \right)$$

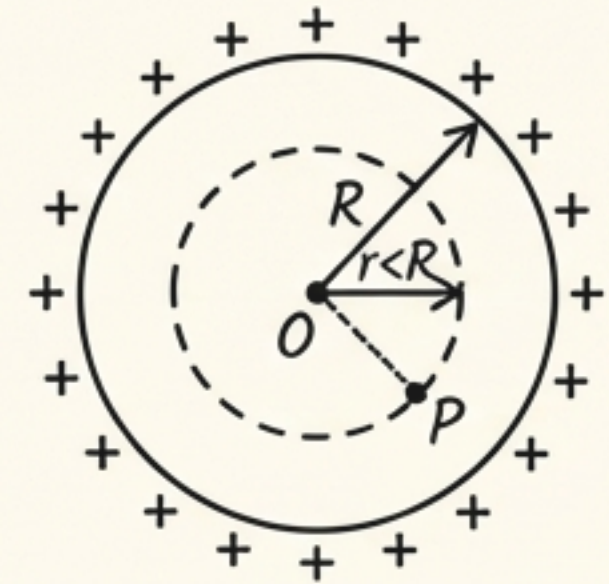
2. कोश के पृष्ठ पर ($r = R$)

समीकरण में $r = R$ रखने पर

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R^2} \right)$$

(अधिकतम तीव्रता)

3. आन्तरिक बिन्दु पर ($r < R$)

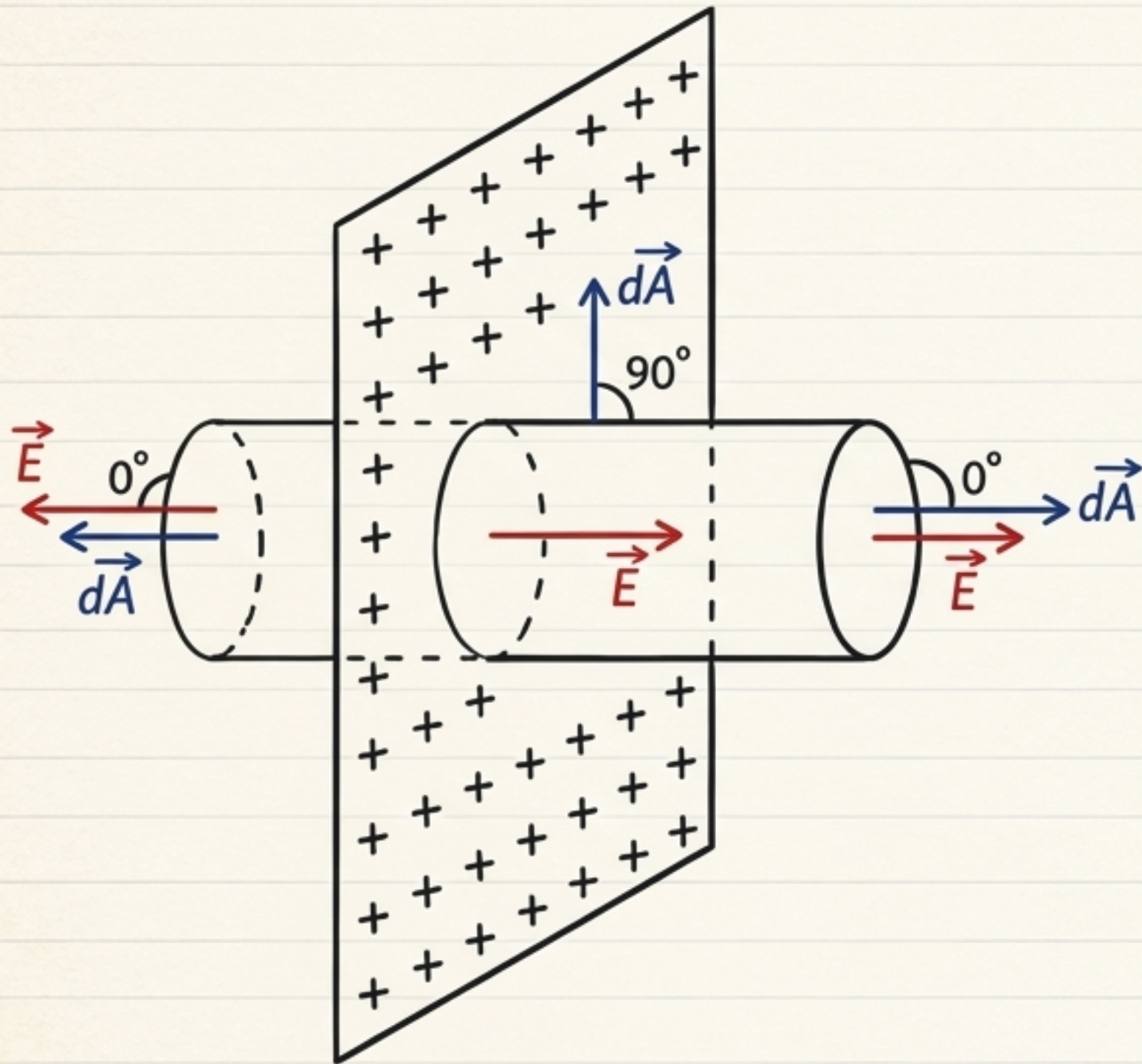


चूँकि कोश के अन्दर कोई आवेश नहीं है ($q = 0$)

$$\oint \vec{E} dA = 0$$

$$E = 0$$

~ गॉस प्रमेय के अनुप्रयोग -2: समतल आवेशित चादर ~



सम्पूर्ण गॉसियन पृष्ठ से गुजरने वाला कुल वैद्युत फ्लक्स:

$$\Phi_E = \Phi_1 \text{ (बायां सिरा)} + \Phi_2 \text{ (दायां सिरा)} + \Phi_3 \text{ (वक्र पृष्ठ)}$$

$$\Phi_E = \int E dA \cos 0^\circ + \int E dA \cos 0^\circ + \int E dA \cos 90^\circ$$

चूँकि $\cos 90^\circ = 0$, वक्र पृष्ठ से फ्लक्स शून्य होगा।

$$\Phi_E = EA + EA = 2EA \quad \text{--- (समीकरण 1)}$$

$$\text{गॉस की प्रमेय से : } \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{--- (समीकरण 2)}$$

$$\text{समीकरण 1 व 2 को बराबर करने पर : } 2EA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

चूँकि पृष्ठीय आवेश घनत्व $\sigma = \frac{q}{A}$ होता है, अतः $q = \sigma A$

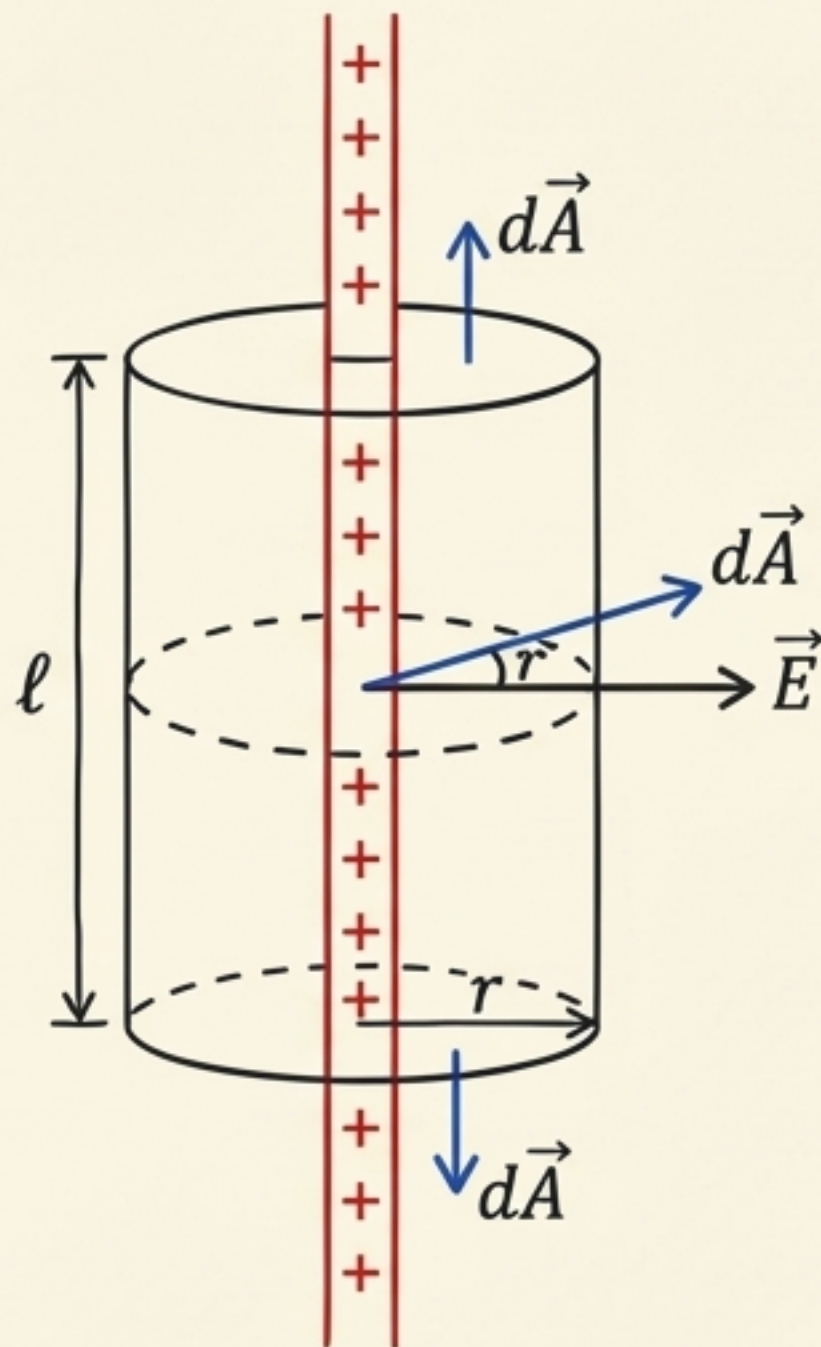
$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$A \text{ से } A \text{ कटने पर : } 2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(दोरी ए.ए. निर्धार नहीं करता)

~ गॉस प्रमेय के अनुप्रयोग -3: अनन्त लम्बाई का तार ~



सम्पूर्ण बेलनाकार गॉसियन पृष्ठ से गुजरने वाला फ्लक्स :

$$\Phi_E = \Phi_1 \text{ (ऊपरी सिरा)} + \Phi_2 \text{ (निचला सिरा)} + \Phi_3 \text{ (वक्र पृष्ठ)}$$

$$\Phi_E = \int E dA \cos 90^\circ + \int E dA \cos 90^\circ + \int E dA \cos 0^\circ$$

चूँकि $\cos 90^\circ = 0$, समतल सिरों से फ्लक्स शून्य होगा।

$$\Phi_E = E \int dA = E (2\pi r \ell) \text{ --- (समीकरण 1, वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल } 2\pi r \ell \text{)}$$

गॉस की प्रमेय से : $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ --- (समीकरण 2)

समीकरण 1 व 2 को बराबर करने पर : $E (2\pi r \ell) = \frac{q}{\epsilon_0}$

चूँकि रेखीय आवेश घनत्व $\lambda = \frac{q}{\ell}$ होता है, अतः $q = \lambda \ell$

$$E (2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

ℓ से ℓ कटने पर :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{N}{C}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\lambda}{r} \right) \frac{N}{C}$$